Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Suite définie par une somme 2

Exercice :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{2n+1}{3^n}$ et $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

1. a) Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle converge vers un réel ℓ.

   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente et calculer sa limite.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = 1 + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \ldots + \frac{2n+1}{3^n}$.

   a) Calculer $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$ en fonction de n.

   b) Montrer que $S_n = 2 - \frac{1}{2\,3^{n-1}} - \frac{1}{2}u_n$ pour tout $n \geq 2$.

   c) Prouver que (S_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}} - \frac{2n+1}{3^n} \times 3$

$= \frac{2n+3-6n-3}{3^{n+1}}$

$= -\frac{4n}{3^{n+1}} \leqslant 0$

Donc (u_n) est décroissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{2n+1}{3^n} > 0$

Donc la suite (u_n) est minorée par 0.

• (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

Ainsi (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

1) b) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{3} u_{n+1}$

$$= \frac{2(n+2)+1}{3^{n+2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2n+5-2n-3}{3^{n+2}}$$

$$= \frac{2}{3^{n+2}}$$

• $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3} u_n$

$$= \frac{2(n+1)+1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2n+1}{3^n}$$

$$= \frac{2n+3-2n-1}{3^{n+1}} = \frac{2}{3^{n+1}}$$

Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$

c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 \times q^n \qquad -1 < \frac{1}{3} < 1$

or $V_0 = U_1 - \frac{1}{3} U_0$ et $q = \frac{1}{3}$

Donc $\boxed{V_n = \left(U_1 - \frac{1}{3} U_0\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(U_1 - \frac{1}{3} U_0\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0}$

2°) a) $\forall n \geq 2,$ $\quad n - 1 - 1 + 1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} V_k = V_1 \cdot \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)}$$

b) $\forall n \geq 2 ;\ S_n = 1 + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \dots + \frac{2n+1}{3^n}$

$$= \sum_{k=1}^{n} U_k$$

$\forall k \in \mathbb{N} ;\ V_k = U_{k+1} - \frac{1}{3} U_k$

Donc $\sum_{k=1}^{n-1} V_k = \sum_{k=1}^{n-1} U_{k+1} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} U_k$

$$= \sum_{k=2}^{n} U_k - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} U_k$$

$$= \sum_{k=2}^{n} U_k - \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} U_k - U_n \right)$$

$$= -U_1 + \sum_{k=1}^{n} U_k - \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3} U_n$$

$$= -U_1 + S_n - \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3} U_n$$

$$= \frac{2}{3} S_n + \frac{1}{3} U_n - U_1$$

Donc $\sum_{k=1}^{n-1} V_k = \frac{2}{3} S_n + \frac{1}{3} U_n - U_1$

$\Rightarrow S_n = \frac{3}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} V_k - \frac{1}{3} U_n + U_1 \right)$

$\Rightarrow S_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right) - \frac{1}{3} \frac{2n+1}{3^n} + 1 \right)$

Donc $S_n = 2 - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{2} U_n \quad \forall n \geq 2$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{2} U_n$ ($\frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} \to +\infty$, $U_n \to l$)

$= 2 - \frac{1}{2} \cdot l \in \mathbb{R}$

Donc (S_n) est convergente.